



Nacionalni centar
za vanjsko vrednovanje
obrazovanja

Preporuke za rješavanje ispita iz Matematike

Zagreb, 2023.

Sadržaj

O zaokruživanju brojeva	3
O pojednostavljivanju	6
O jednadžbama i nejednadžbama	8
O crtanju grafova funkcija	10
O geometriji	15

O zaokruživanju brojeva

Prilikom računanja podatci zadani u zadatku se **ne zaokružuju**.

Ako je rezultat racionalan broj kojemu je decimalan zapis konačan, broj se **ne zaokružuje**, osim ako uputom u zadatku nije drugačije navedeno.

Primjer 1. Kovanica od 10 centi napravljena je od legure poznate kao nordijsko zlato koja se sastoji od 89 % bakra, 5 % aluminija, 5 % cinka i 1 % kalaja. Masa kovanice od 10 centi iznosi 4.10 g. Koliko je grama bakra potrebno za izradu jedne kovanice od 10 centi?

Napomena 1. Rješenje zadatka je točno 3.649 g i ne zaokružuje se.

Primjer 2. Oka je stara mjerna jedinica za volumen za koju vrijedi 1 oka = 1.282 dm³. Koliko **oka** iznosi 2.564 m³?

Napomena 2. Očekuje se da se račun provodi sa zadanim vrijednostima, pri čemu se međurezultat

$$1 \text{ dm}^3 = \frac{1}{1.282} \text{ oka ne zaokružuje.}$$

$$\text{Budući da je } 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3, \text{ dobiva se rezultat } 2.564 \text{ m}^3 = 2.564 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{1.282} = 2000 \text{ oka.}$$

Pri računanju s iracionalnim brojevima (brojevi s beskonačnim neperiodičnim decimalnim zapisom; npr. broj π , vrijednosti trigonometrijskih funkcija...) **najbolje je koristiti se vrijednostima s džepnoga računala** ili ih zaokružiti na **najmanje četiri decimalna mjesta**.

Primjer 3. Kolika je mjera kuta α **tupokutnoga** trokuta ABC kojemu su duljine stranica $a = 10 \text{ cm}$ i $c = 8 \text{ cm}$, a mjera kuta $\gamma = 48^\circ$?

Napomena 3. Očekivani je rezultat $111^\circ 43' 52''$. Taj se rezultat dobije ako se vrijednosti funkcije sinus ne zaokružuju ili ako se zaokružuju na barem četiri decimalna mjesta. Kada bi se vrijednost sinusa kuta od 48° zaokružila na tri decimalna mjesta, dobio bi se rezultat $111^\circ 45' 33''$, a kada bi se zaokružila na dva decimalna mjesta, dobio bi se rezultat $112^\circ 19' 54''$ i odstupanje od očekivanoga rezultata bilo bi značajnije. Zaokruživanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija na manje od četiriju decimalnih mjesta **nije** prihvatljivo.

Ako se u zadatku traži zaokruživanje na određeni broj decimalnih mjesta, to se odnosi na konačan rezultat. Međurezultati se tada mogu računati s točnosti od najmanje **dvaju decimalnih mjesta više od** traženoga rezultata (npr. točnost rezultata na dva decimalna mjesta zahtijeva točnost međurezultata na najmanje četiri decimalna mjesta).

Primjer 4. Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta iznosi 9 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm. Rezultat zaokružite na dva decimalna mjesta.

Napomena 4. Očekivani je rezultat 272.27 cm^3 . Međurezultat u zadatku je duljina druge katete koja iznosi $\sqrt{65} \text{ cm}$ i najbolje je računati s tom točnom duljinom. Ako se broj $\sqrt{65}$ zaokružuje, valja ga zaokružiti na najmanje četiri decimalna mjesta (8.6023) kako bi konačni rezultat imao zahtijevanu točnost. Ako se, primjerice, međurezultati zaokružuju na dva decimalna mjesta ($\sqrt{65} \approx 8.06$, $\pi \approx 3.14$), dobije se rezultat 271.98 cm^3 koji značajnije odstupa od očekivanoga rezultata.

Neki su brojevi zaokruženi prilikom zadavanja (veliki ili mali brojevi ili brojevi prikazani znanstvenim zapisom). Stoga su u zadacima višestrukoga izbora ponuđena rješenja također zaokružena, a u zadacima kratkoga odgovora prihvaćaju se i rješenja zapisana u skladu sa zadanim podacima.

Primjer 5. Ljudsko srce prosječno kuca 80 otkucaja u minuti. Koliko približno otkucaja napravi ljudsko srce u jednoj godini?

- A. $4.2 \cdot 10^9$
- B. $4.2 \cdot 10^7$
- C. $1.7 \cdot 10^6$
- D. $1.7 \cdot 10^5$

Napomena 5. U zadatku se traži približan broj otkucaja srca, stoga su u odgovorima navedene približne vrijednosti.

Primjer 6. Na zemljovidu mjerila 1:50 000 polumjer kruga iznosi 1.5 cm. Koliko iznosi površina koju taj krug predstavlja u prirodi?

- A. 1.1 km^2
- B. 1.8 km^2
- C. 2.4 km^2
- D. 3.5 km^2

Napomena 6. Iz ponuđenih je odgovora vidljivo da se odgovor traži u km^2 zaokruženo na jedno decimalno mjesto. Računom se dobije $1.767145 \dots \cdot 10^{10} \text{ cm}^2$, što iznosi približno 1.8 km^2 .

Primjer 7. Najsajjnija zvijezda Sirius udaljena je od Zemlje 8.6 svjetlosnih godina (gs). Kolika je ta udaljenost u astronomskim jedinicama (AJ)?

Napomena: $1 \text{ AJ} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$, $1 \text{ gs} = 9.46 \cdot 10^{12} \text{ km}$

Napomena 7. Kako je $1 \text{ km} = \frac{1}{1.5 \cdot 10^8} \text{ AJ}$, slijedi da je $8.6 \text{ gs} = 8.6 \cdot \frac{1}{1.5 \cdot 10^8} \cdot 9.46 \cdot 10^{12} = 542373.3 \text{ AJ}$,

no u skladu s podacima zadanim u zadatku prihvaća se i odgovor $5.4 \cdot 10^5 \text{ AJ}$.

U nekim je zadacima rješenja potrebno ili nužno zaokružiti u skladu s kontekstom zadatka.

Primjer 8. Funkcija $P(t) = 145 \cdot 2.72^{-0.092t}$ opisuje puls trkača t minuta nakon utrke, $0 \leq t \leq 15$.

Koliki je puls trkača tri minute nakon utrke?

Napomena 8. Vrijednost funkcije za $t = 3$ iznosi $P(3) = 145 \cdot 2.72^{-0.092 \cdot 3} = 110.0086879...$

Očekivani je odgovor cijeli broj 110.

Primjer 9. Kamata na uloženi novac u banci računa se složenim kamatnim računom. Ovisnost uloženoga i

konačnoga iznosa možemo prikazati formulom $C_t = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, gdje je C_t iznos nakon t godina,

C_0 uloženi iznos, p godišnja kamatna stopa, a t vrijeme u godinama.

Na koliko godina moramo uložiti neki iznos uz kamatnu stopu od 1.5 % da bi se uloženi iznos povećao za 20 %?

Napomena 9. Iz jednakosti $1.2C_0 = C_0 \left(1 + \frac{1.5}{100}\right)^t$ dobiva se $t \approx 12.2457$. Nije prihvatljiv zaokruženi

odgovor 12 godina, već je u skladu s kontekstom zadatka točan odgovor 13 godina.

O pojednostavljivanju

U sljedećim primjerima dane su neke napomene vezane uz pojednostavljivanje izraza, skraćivanje razlomaka i slično.

Ako je rezultat **racionalan broj** zapisan u obliku razlomka, treba ga napisati u obliku do kraja skraćenoga razlomka, osim ako uputom u zadatku nije drugačije navedeno.

Primjer 10. Zadani su brojevi $a = \frac{18}{25}$ i $v = 6.3$. Odredite broj $V = \frac{1}{3}a^2v$.

Napomena 10. Očekivani je odgovor broj $\frac{3402}{3125} = 1.08864$. Razlomak $\frac{2041.2}{1875}$ nije prihvatljiv kao odgovor jer je brojnik zapisan decimalnim zapisom.

Primjer 11. Izračunajte $\frac{\sqrt[3]{4} + 2}{-81:3}$.

Napomena 11. Očekivani je odgovor broj u decimalnome zapisu. Rezultat je ovoga računa iracionalan broj $-0.1328667056 \dots$. Budući da se u zadatku ne traži zaokruživanje na određeni broj decimalnih mjesta, svako zaokruživanje na najmanje dva decimalna mjesta prihvatljiv je odgovor, npr. -0.13 ili -0.133 ili -0.132867 .

Odgovor $-\frac{359}{2700}$ nije prihvatljiv, iako se dijeljenjem dobije broj približan očekivanom odgovoru. Samo se racionalni brojevi zapisuju u obliku razlomka.

Ako je rezultat **kompleksan broj**, treba ga napisati u algebarskom obliku $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$ ili trigonometrijskom obliku $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Primjer 12. Neka je $z = 3 + 2i$. Koliko je $(iz\bar{z})^4$?

Napomena 12. Očekivani je odgovor $28\,561$ ili 13^4 . Odgovori $(13i)^4$, $28561i^4$ i slično nisu prihvatljivi jer nisu do kraja pojednostavljeni.

Primjer 13. Izračunajte $\frac{(1-i)^8}{1+i}$.

Napomena 13. Očekivani je odgovor $8 - 8i$. Odgovor $\frac{16}{1+i}$ nije prihvatljiv jer nisu provedene sve naznačene računske operacije.

Primjer 14. Koliko iznosi umnožak $z \cdot w$ ako je $z = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$ i $w = 6\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$.

Napomena 14. Očekivani je odgovor $z = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Odgovor $z = 6\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$ nije prihvatljiv jer $\frac{11\pi}{4} \notin [0, 2\pi)$.

Kod sređivanja algebarskih izraza potrebno je zbrojiti monome istoga stupnja, a algebarske razlomke skratiti.

Primjer 15. Pojednostavite izraz $(1234 - 2a)(1234 + 2a) - (a - 1234)^2$ do kraja.

Napomena 15. Očekivani je odgovor $2468a - 5a^2$ ili $a(2468 - 5a)$. Odgovor $-4a^2 - a^2 + 2468a$ nije prihvatljiv jer nije pojednostavljen do kraja. Odgovor $2468a - 5a^2 = 0$ nije prihvatljiv jer je u zadatku zadan algebarski izraz, a ne jednadžba.

Primjer 16. Koji je rezultat oduzimanja $\frac{1}{a-3} - \frac{6}{a^2-9}$ za sve a za koje je izraz definiran?

Napomena 16. Očekivani je odgovor $\frac{1}{a+3}$. Odgovor $\frac{a-3}{a^2-9}$ nije prihvatljiv jer nije pojednostavljen do kraja.

Primjer 17. Pojednostavite izraz $\frac{(x^{-2}y)^{-1}}{x^3y^{-1}}$ do kraja.

Napomena 17. Očekivani je odgovor $\frac{1}{x}$ ili x^{-1} . Odgovor, primjerice, $\frac{x^2}{x^3}$ nije prihvatljiv jer nije pojednostavljen do kraja.

Primjer 18. Kako glasi jednadžba pravca usporednoga pravcu $3x + 5y + 7 = 0$ koji prolazi kroz središte kružnice $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$?

Napomena 18. Očekivani je odgovor $y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$ ili neki drugi ekvivalentni oblik jednadžbe pravca (implicitni, segmentni). Odgovor $y - 2 = -\frac{3}{5}(x + 1)$ nije prihvatljiv jer nije sređen i pojednostavljen do kraja.

O jednadžbama i nejednadžbama

U zadatcima u kojima se rješenje nejednadžbe treba zapisati u obliku intervala interval mora biti ispravno zapisan.

Primjer 19. Riješite nejednadžbu $-2x^2 + x + 1 > 0$ i zapišite rješenje u obliku intervala.

Napomena 19. Očekuje se rješenje $\left\langle -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle$.

Zapisi $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left\langle -\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left\langle 1, -\frac{1}{2}\right\rangle$ nisu prihvatljivi.

Primjer 20. Riješite nejednadžbu $-2x + 1 > 7$ i zapišite rješenje u obliku intervala.

Napomena 20. Očekuje se rješenje $\langle -\infty, -3 \rangle$.

Zapisi $[-\infty, -3]$, $[-\infty, -3)$, $\langle -\infty, -3]$, $\langle -3, -\infty \rangle$ nisu prihvatljivi.

Rješenje sustava jednadžbi s dvjema nepoznicama potrebno je zapisati ili u obliku uređenoga para ili zapisati vrijednost pojedine nepoznanice.

Primjer 21. Riješite sustav linearnih jednadžbi
$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

Napomena 21. Očekuje se rješenje $(1, 2)$ ili $x = 1, y = 2$.

Nije prihvatljiv zapis $1, 2$ jer iz toga zapisa nije vidljivo koja je vrijednost nepoznanice x , odnosno y .

Rješenja trigonometrijskih jednadžbi trebaju biti u skladu s tekstom zadatka. U zapisu rješenja nije prihvatljivo kombinirati stupnjeve i radijane.

Primjer 22. Odredite sva rješenja jednadžbe $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

Napomena 22. Očekuje se rješenje, npr. $x_1 = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Nije prihvatljivo $x_1 = \frac{5\pi}{18}$, $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ jer nisu obuhvaćena sva rješenja jednadžbe.

Nije prihvatljivo $x_1 = 50^\circ + k \cdot 120^\circ$, $x_2 = -30^\circ + k \cdot 120^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$ jer su rješenja jednadžbe realni brojevi, a ne kutovi.

Nije prihvatljivo $x_1 = \frac{5\pi}{18} + k \cdot 120^\circ$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 120^\circ$, $k \in \mathbf{Z}$ jer su kombinirani radijani i stupnjevi.

Primjer 23. Koja su rješenja jednadžbe $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ iz intervala $[0, \pi]$?

Napomena 23. Očekuje se rješenje $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$.

Nije prihvatljivo $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ jer se u zadatku traže samo rješenja iz zadanoga intervala.

Ako se uz rješenje jednadžbe zapiše i broj dobiven ispravnim postupkom rješavanja koji ne zadovoljava uvjete zadane jednadžbe, odgovor neće biti priznat.

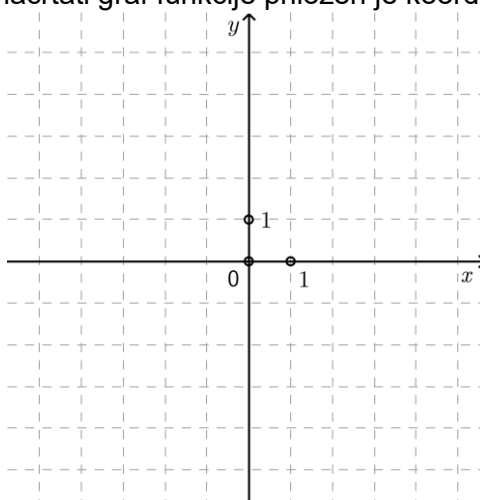
Primjer 24. Riješite jednadžbu $\sqrt{x+6} = x$.

Napomena 24. Očekuje se rješenje $x = 3$.

Nije prihvatljivo $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ jer -2 ne zadovoljava uvjete iracionalne jednačbe.

O crtanju grafova funkcija

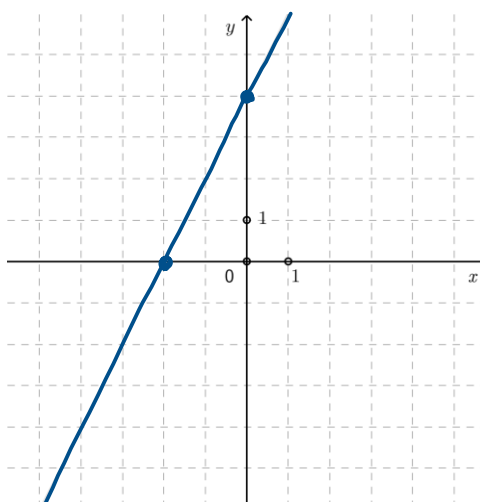
U zadatcima u kojima je potrebno nacrtati graf funkcije priložen je koordinatni sustav.



Dovoljno je u cijelome priloženom koordinatnom sustavu nacrtati dio grafa koji je karakterističan za zadanu funkciju. Ako je graf funkcije crtan po dijelovima, potrebno je naznačiti što je konačan graf zadane funkcije. Ako funkcija ima asimptotu, dobro je, ali ne i nužno, nacrtati i nju.

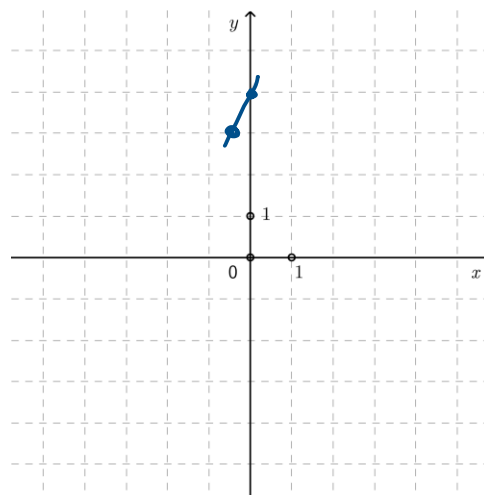
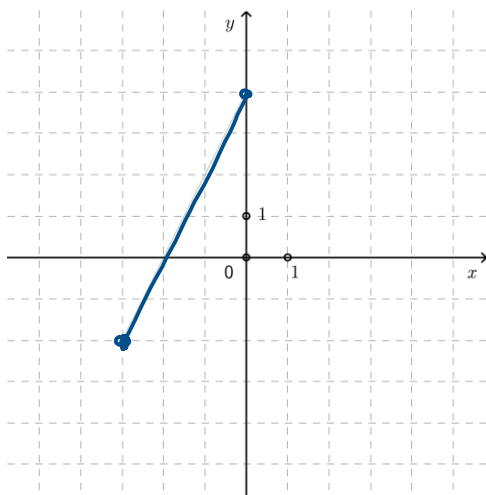
Primjer 25. U priloženome koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $f(x) = 2x + 4$.

Napomena 25. Očekuje se sljedeće rješenje.



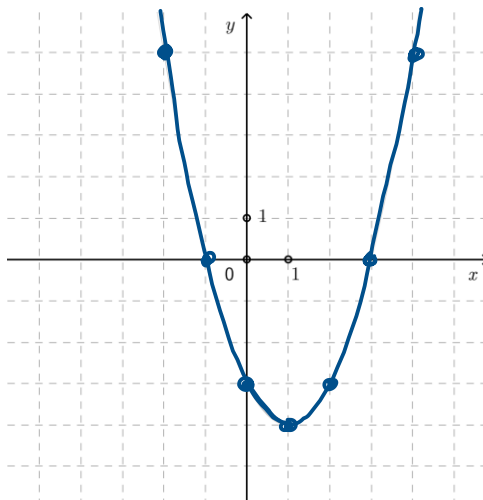
Graf funkcije nacrtan je preko cijeloga priloženog koordinatnog sustava. Na grafu su istaknute dvije proizvoljne karakteristične točke (dovoljne za crtanje grafa linearne funkcije).

U nastavku su ponuđeni grafički prikazi koji nisu prihvatljivi.



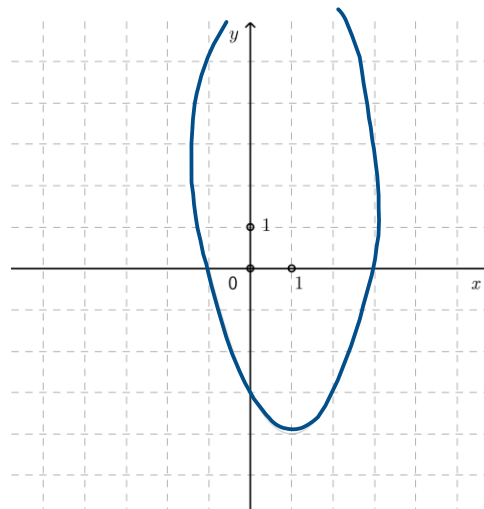
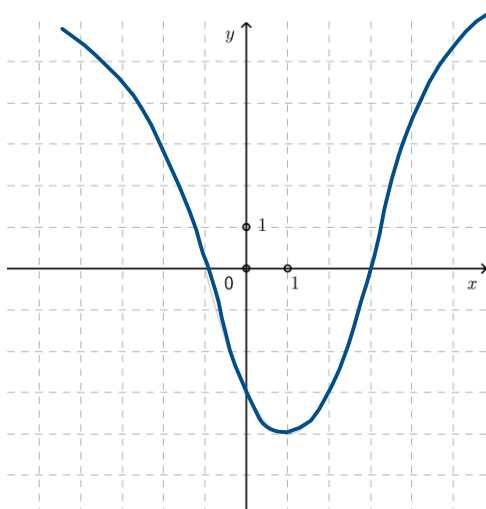
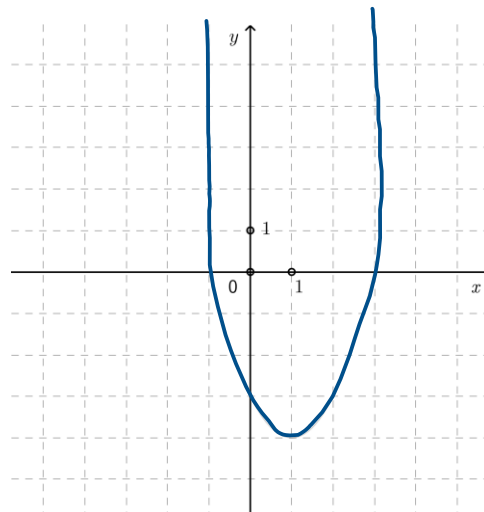
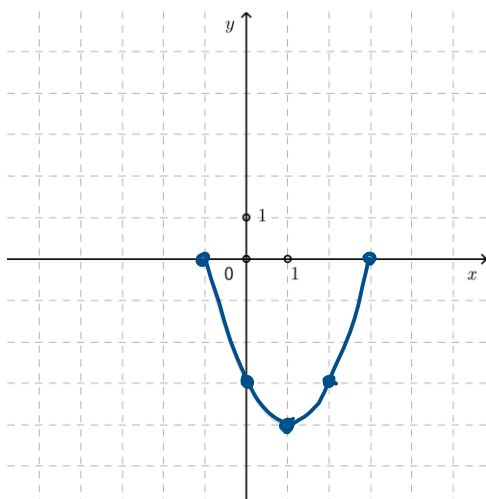
Primjer 26. U priloženome koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

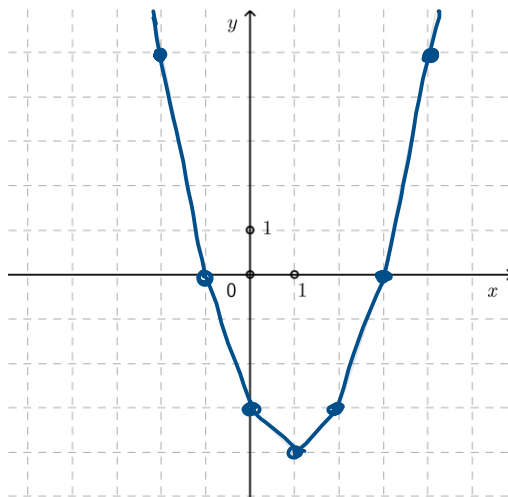
Napomena 26. Očekuje se sljedeće rješenje.



Graf funkcije ispravnoga je oblika i nacrtan je preko cijeloga priloženog koordinatnog sustava.

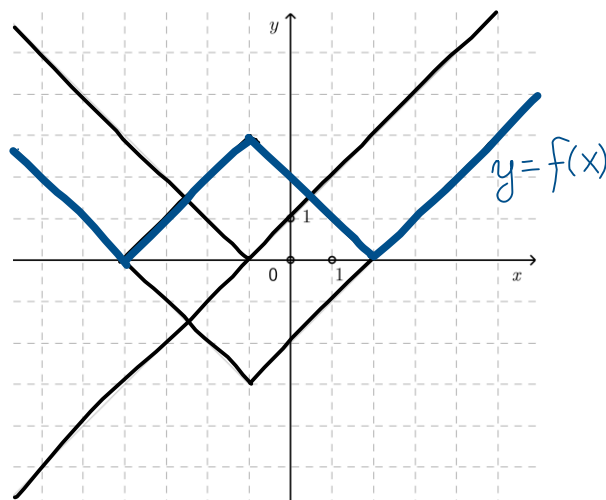
U nastavku su ponuđeni grafički prikazi koji nisu prihvatljivi.





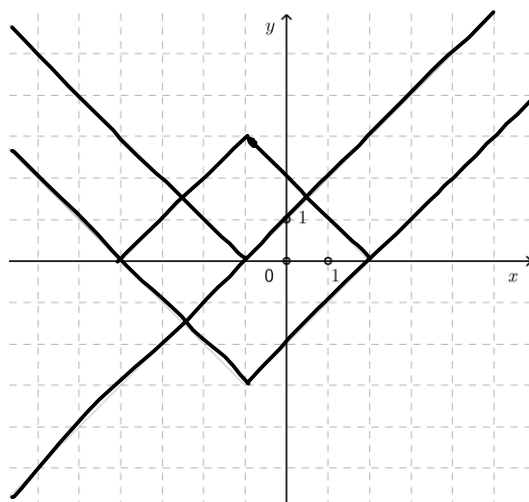
Primjer 27. U priloženome koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $f(x) = ||x + 1| - 3|$.

Napomena 27. Očekuje se sljedeće rješenje.



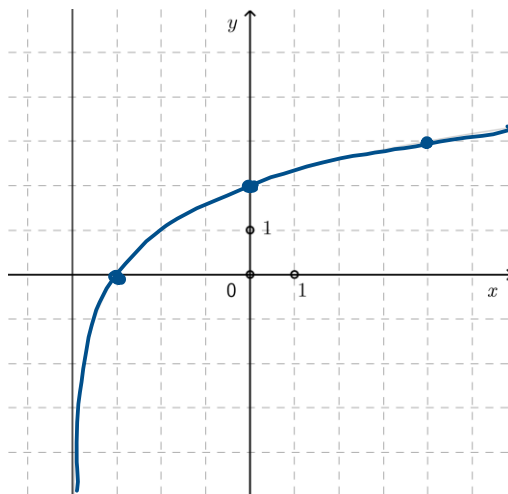
Graf funkcije nacrtan je preko cijeloga priloženog koordinatnog sustava. Iako u koordinatnome sustavu nije nacrtan samo graf zadane funkcije, on je jasno istaknut i označen.

U nastavku je ponuđen grafički prikaz koji nije prihvatljiv.



Primjer 28. U priloženome koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $f(x) = \log_2(x + 4)$.

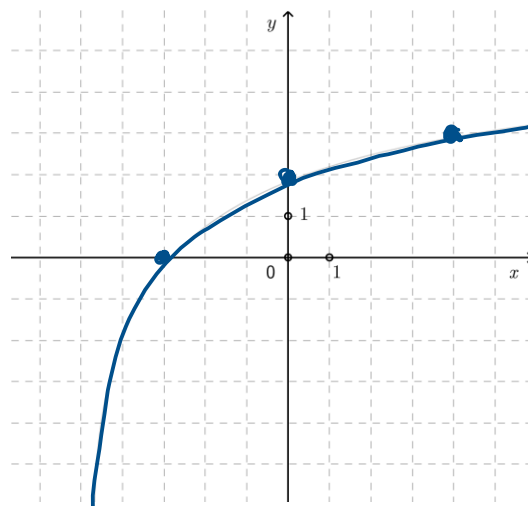
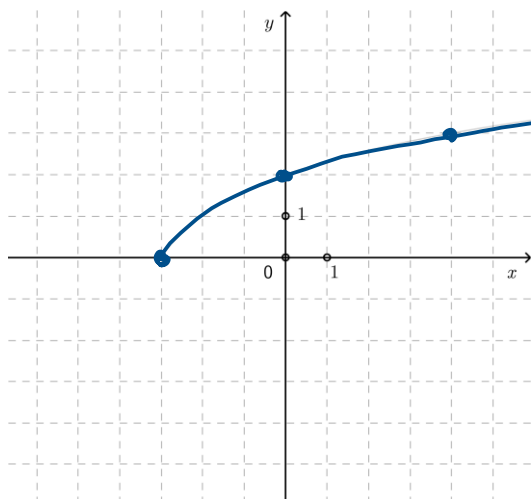
Napomena 28. Očekuje se sljedeće rješenje.



Graf funkcije nacrtan je preko cijeloga priloženog koordinatnog sustava i nacrtana je asimptota funkcije.

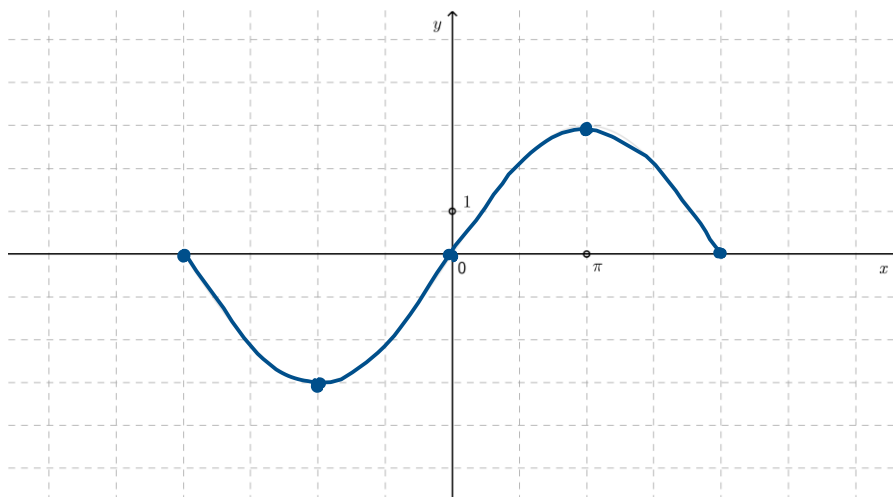
Za ostvarivanje maksimalnoga broja predviđenih bodova nije nužno nacrtati asimptotu, ali je nužna vidljivost približavanja grafa zadane funkcije asimptoti.

U nastavku su ponuđeni grafički prikazi koji nisu prihvatljivi.

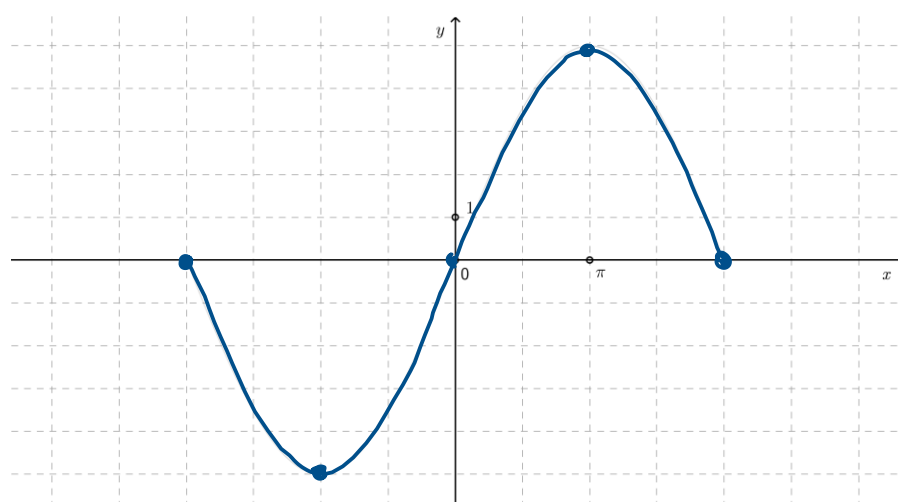
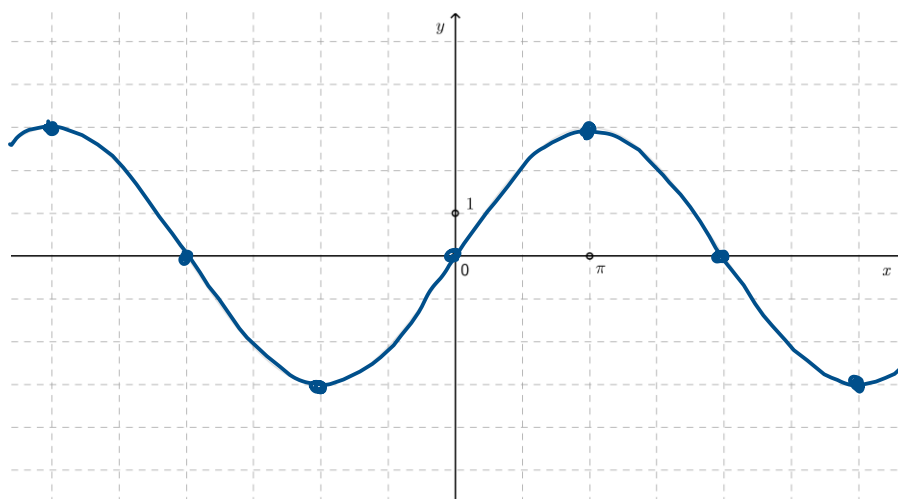


Primjer 29. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

Napomena 29. Očekuje se sljedeće rješenje.



U nastavku su ponuđeni grafički prikazi koji nisu prihvatljivi.



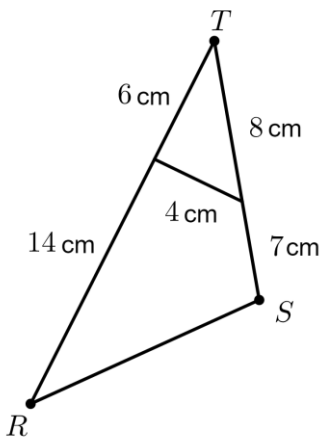
O geometriji

U tekstovima zadataka pojavljuju se pojmovi „**skica**” i „**slika**”.

Skica prikazuje geometrijski objekt čije mjere kutova i duljine dužina **ne moraju** odgovarati zadanim vrijednostima.

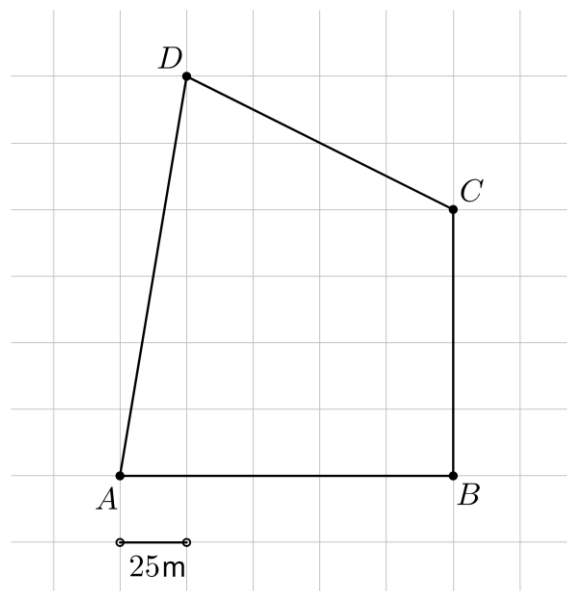
Slika je nacrtana u koordinatnome sustavu i svi njezini elementi moraju odgovarati zadanim vrijednostima u skladu s jediničnim duljinama toga koordinatnog sustava.

Primjer 30. Na **skici** je prikazan trokut RST . Kolika je duljina stranice $\overline{RS}$?



Napomena 30. Očekuje se rješenje: $|RS| = 10$ cm. U zadatku je zadana skica. Duljine dužina ovoga trokuta izmjerene ravnalom ne odgovaraju navedenim veličinama pa ni njihovim omjerima. Zadatci u kojima je zadana skica ne mogu se rješavati mjerenjem geometrijskim priborom, već računanjem iz zadanih podataka.

Primjer 31. Na **slici** je u kvadratnoj mreži prikazano zemljište. Kolika je površina zemljišta u m^2 ?



Napomena 31. Očekuje se rješenje $14\,375 \text{ m}^2$.

U zadatku je nacrtana slika u kvadratnoj mreži i svi njezini elementi odgovaraju zadanim vrijednostima u skladu s jediničnom duljinom koja je u ovom zadatku 25 m.

U pravilu, ako u geometrijskim zadacima nisu navedene mjerne jedinice, podrazumijeva se da su duljine izražene u jediničnim duljinama, površine u kvadratnim jedinicama, a obujmi u kubnim jedinicama.

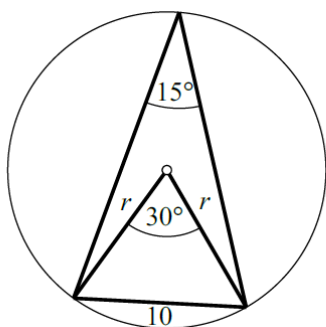
Ako se u zadacima produženoga odgovora crta skica na kojoj su označeni neki elementi, potrebno je koristiti se tim istim oznakama u postupku računanja.

Primjer 32.

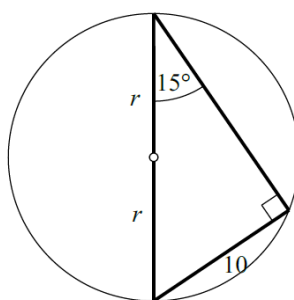
Koliki je polumjer kružnice ako je nad njezinom tetivom duljine 10 cm obodni kut mjere 15° ?

Napomena 32.

Očekuje se rješenje $5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$ cm.



ili

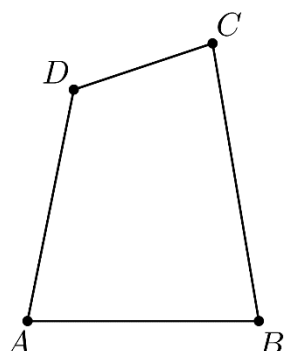


$$\sin 15^\circ = \frac{10}{2r} \Rightarrow r = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$$

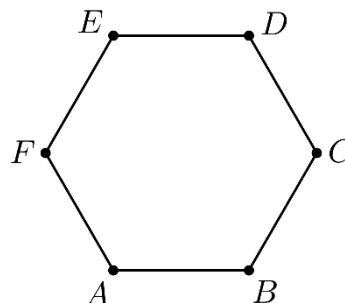
Ako se u geometrijskim zadacima navode vrhovi mnogokuta, podrazumijeva se da su redom navedeni vrhovi susjedni i označeni u pozitivnome smjeru (obrnutome od smjera kazaljke na satu).

Primjer 33.

Četverokut $ABCD$



Šesterokut $ABCDEF$



Stručna radna skupina za Matematiku